Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД

из математике

Игра погађања шешира на графу

Ученик

Страхиња Гвоздић
одељење IV д

Ментор

др Лука Милићевић
Математички институт САНУ

Београд, јун 2021.

Сажетак

Рад се бави различитим варијацијама игре погађања шешира на графу. Класична игра подразумева неки граф G у чијим чворовима стоје људи на чије се главе постављају шешири у некој од q могућих боја. Свака особа може да види само боје шешира људи у суседним чворовима и не може да види своју боју шешира. Потребно је наћи стратегију по којој свака особа може погађати своју боју шешира искључиво на основу боја шешира које види, те која нам гарантује да ће при сваком избору боја барем једна особа тачно погодити своју боју шешира. Највеће q за које постоји таква стратегија назива се HG-бројем графа. Посматраћемо и линеарну варијацију игре, у којој се захтева да стратегија сваке особе буде линеарни полином (где боје одговарају елементима неког коначног поља), и увешћемо нову, хроматску верзију, у којој се гарантује да суседни чворови имају различите боје шешира. У све три игре ћемо представити неке познате резултате. Такође ћемо дати нови услов када из графа можемо обрисати неку групу чворова, а да не променимо његов HG-број, и даћемо примере на којима су ти услови оштри. У хроматској игри ћемо наћи HG-број комплетног графа.

Abstract

This paper deals with several variations of the hat-guessing game on graph. The basic variant of the game includes a graph G whose vertices are occupied by people wearing hats in one of q possible colours. Each person can only see the hat colours of the people in his or her neighbourhood, and cannot see his or her own hat colour. The goal is to find a guessing strategy for each person, dependent exclusively on the hat colours which he or she can see, and which guarantees that at least one person would guess his or her hat colour correctly, under any choice of hat colours. The greatest q for which this kind of strategy exists is called HG-number of the given graph. We will also consider the linear variation of the game, where it is required that each person's strategy is formulated in terms of a linear polynomial (where colours represent elements of a finite field), and will introduce a new, chromatic, variation, in which it is guaranteed that no two adjacent vertices have the same hat colours. In each of the games, we will present some previously known results. Furthermore, we will give a novel condition under which a certain group of vertices can be deleted from a graph, without its HG-number being changed, and will provide examples for which this condition is sharp. In the chromatic game, we will find HG-number of a complete graph.

Садржај

1 Увод

Различите верзије игре погађања шешира већ неко време добијају значајну пажњу математичке јавности. Проблем ове игре први пут се јавља 1961. у [10], да би игра стекла на популарности тек са верзијом датом у Ебертовој дисертацији 1998. [7] и текстом Робинсонове објављеном у Њујорк Тајмсу 2001. [12], где је презентовала баш Ебертов проблем.

Пример 1. *Троје пријатеља, Алиса, Боб и Чарли играју следећу игру: на главу сваког од њих се поставља шешир сиве или смеђе боје, и то тако што се за сваког од њих, и независно од осталих, баца класичан новчић (са једнаким вероватноћама за писмо и главу). Сваки од играча види боје шешира свих других играча, али не види своју, и никаква комуникација међу играчима није дозвољена, сем на почетку, када могу да се договоре око стратегије коју ће користити када им буде дат знак. Тада треба да, истовремено, све троје изаберу за себе хоће ли погађати боју шешира на својој глави (изговарајући боју наглас) или неће (ћутаће). Играчи побеђују и добијају награду од милион долара ако бар један од њих исправно погоди боју свог шешира, и нити један од њих не погреши, а иначе губе. Каква стратегија даје највећу вероватноћу победе за Алису, Боба и Чарлија?*

Решење. Играчи могу постићи 75% успешности следећом стратегијом: ако неки играч на главама друга два играча види шешире исте боје, онда погађа боју супротну од те, а иначе бира да не погађа. На овај начин, ако су сви шесири исте боје, сви играчи ће погрешити при погађању своје боје, док у свим комбинацијама, којих има 6, у којима су два шешира исте и један различите боје, тај коме је шешир различите боје погађа исправно, док друга два играча бирају да не погађају, чиме у тих 6 од 8 случајева играчи себи обезбеђују победу, односно побеђују с вероватноћом $\frac{6}{8} = 75\%$. Докажимо још да је ово најбоља тактика коју играчи могу развити. Приметимо да за сваки пут када неки играч тачно погоди своју боју шешира, међу свим могућим постављањима шешира, постоји једно при коме тај играч не погађа своју боју исправно, и обратно, односно, постоји бијекција између сваког тачног погађања неког играча, и сваког нетачног погађања неког играча, јер за неку комбинацију шешира при којој неки играч погађа исправно, можемо наћи ону у којој то не чини тиме што ћемо просто заменити боју шешира на његовој глави. Претпоставимо сада супротно, да постоји стратегија при којој играчи погађају за бар седам начина постављања шешира. То би значило и да, гледајући свих осам постављања шешира, због бијекције између тачних и нетачних погађања, играчи погађају неисправно укупно бар седам пута, а како за једно постављање шешира могу погодити неипсравно највише три пута (односно сваки од играча), то би значило да за бар три постављања шешира неки од играча погрешно погађа, што је у супротности с тиме да је бар седам постављања шешира победничко. □

Овај проблем је веома занимљив из више разлога. Пре свега, на први поглед се чини да је најбоља тактика коју можемо добити она која нам гарантује само 50% победа, јер ниједан играч појединачно, због претходно објашњене бијекције, не може погодити у више од 50% случајева, док се испоставља да сви заједно заправо могу погодити у 75% случајева. Други, важнији разлог интересантности овог проблема је следећи: нити један од играча нема баш никакву информацију о боји сопственог шешира, а ипак је могуће да, гледајући боје осталих, уз релативно високу вероватноћу (у сваком случају вишу од пуког погађања пола-пола) неко од њих исправно погоди боју свог шешира и да нико притом не омаши. Штавише, делимичним варирањем правила игре, али остајући при томе да ниједан играч нема никакву информацију о сопственом шеширу, може се чак обезбедити да све конфигурације буду победничке (где то шта значи да играчи побеђују зависи од правила игре, али подразумева да неки од играча исправно погоди боју свог шешира). Ова изванредна појава да чланови неког система немају информацију о сопственом стању, а да ипак неко од њих може ту информацију да добије само посматрајући стања осталих чланова, има широку примену у различитим гранама науке, што је представљено у докторској тези Кшвковског [11], и то посебно у секцији 2.10.

Ми ћемо се задржати на различитим интерпретацијама овог проблема и њиховом математичком аспекту. Притом се у даљем раду нећемо бавити вероватносним верзијама игре, нити ћемо допуштати да играчи изаберу да не погађају: узећемо да је за победу довољно да бар неки од играча исправно погоди, а од значаја ће нам бити стратегије при којима су сви могући распореди шешира победнички.

Пре него што наставимо, потребно је да објаснимо нотацију коју ћемо користити у наставку рада.

1.1 Асимптотска нотација

Дефиниција 2. *Нека су f и g реалне функције дефинисане на неком неограниченом подскупу позитивних реалних бројева такве да је $g(x)$ позитивна за довољно велике x. Тада пишемо $f(x) = O(g(x))$ ако постоји позитивна константа M и реално x_0 таква да је $f(x) \leq Mg(x)$ за све $x > x_0$.*

Претходној дефиницији је еквивалентан следећи запис: $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$, што значи да се функција f асимптотски понаша највише као g, односно да највише једнаком брзином тежи бесконачности као g. Наредне дефиниције су сличног карактера.

Дефиниција 3. *Нека су f и g реалне функције дефинисане на неком неограниченом подскупу позитивних реалних бројева такве да је $g(x)$ позитивна за довољно велике x. Тада пишемо $f(x) = o(g(x))$ ако за све позитивне константе ϵ постоји реално x_0 тако да је $f(x) \leq \epsilon g(x)$ за све $x > x_0$.*

Дефиниција 4. *Нека су f и g реалне функције дефинисане на неком неограниченом подскупу позитивних реалних бројева. Тада пишемо $f(x) = \Omega(g(x))$ ако постоји позитивна константа m и реално x_0 таква да је $f(x) \geq mg(x)$ за све $x > x_0$.*

Овако дефинисано, $f(x) = o(g(x))$ значи да f расте строго спорије од g, док $f(x) = \Omega(g(x))$ значи да f расте барем једнако брзо као g. У запису ћемо често неке функције превише компликованог записа једноставно замењивати њиховим асимптотским границама. Тако ћемо, на пример, за неке функције које у бесконачности теже нули писати $o(1)$.

2 Класична игра на графу

Скуп чворова графа G даље ћемо означавати са (G). Скуп чворова суседних чвору v ћемо означавати са $\mathrm{Nbr}(v)$. Величину скупа $|\mathrm{Nbr}(v)|$ за дати чвор v ћемо означавати са $\deg(v)$. Писаћемо и $[q] = \{0, 1, ..., q-1\}$ за природан број q.

Дефиниција 5. *Нека је дат граф G и природан број q. (G, q)-игром називамо следећу игру на графу G: чворови графа G се обоје произвољно у скупу $[q]$ пресликавањем $\chi : V(G) \longrightarrow [q]$. Сваки од чворова може да види само боје чворова који су му суседи (и не може да види сопствену боју). Циљ је наћи детерминистичку стратегију за сваки од чворова која се за дати чвор заснива на бојама које тај чвор види, и која гарантује да што већи број конфигурација боја чворова буде победнички, односно да у што већем броју конфигурација своју боју тачно погоди бар један чвор. Граф G називамо графом видљивости.*

Стратегија чворова у (G,q)-игри где G садржи n чворова $v_1, v_2, ..., v_n$ је n-торка функција $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ где $f_i : [q]^{\deg(v_i)} \longrightarrow [q]$ као параметре узима само боје чворова који су суседни са v_i у G.

Кажемо да је (G,q)-игра победничка ако постоји стратегија њених чворова која за сваку конфигурацију боја гарантује да бар један чвор исправно погађа своју боју. Ако је (G,q)-игра победничка кажемо и да је G q-решив.

Број игре погађања шешира на графу G, или HG*-број графа G (од енг. hat-guessing), јесте највећи природан број q такав да је (G,q)-игра победничка.*

Иако је оваква варијација игре једна од основних, тек се мали број радова до сада бавио питањем тражења HG-броја за разне типове графова, тако да су данас конкретне вредности овог графовског параметра познате тек за мали број фамилија графова, а ограничења на тај број позната тек за још неколико врста. Ипак, пре него што би се ови, као и неки нови резултати, могли уопште представити, потребно је да покажемо зашто дефиниција овог параметра уопште има смисла. За почетак, то значи да за различите графове можемо да пронађемо стратегију за неки нетривијални број боја, што нам управо и даје наредно тврђење.

Тврђење 6. *Комплетан граф над n чворова, K_n, је n-решив.*

Доказ. Доделимо сваком од n чворова по један број из $\mathbb{Z}_n$ (односно по један од могућих остатака по модулу n). Пустимо да сваки од чворова погађа своју боју тако да би збир свих боја у графу био једнак у $\mathbb{Z}_n$ баш остатку који је том чвору додељен, односно, чвор v са остатком $i \in \mathbb{Z}_n$ погађа као своју боју $i - \sum_{u \in V(K_n)\setminus\{v\}} \chi(u) \in \mathbb{Z}_n$, што је могуће јер види све друге боје сем сопствене. И заиста, пошто сваки од n чворова има додељен различит остатак по модулу n, то тачно један од њих има исправну претпоставку о суми свих боја по модулу n, па самим тим и тачно један чвор тачно погађа своју боју. $\square$

Сада када смо показали да HG-број може узети нетривијалне вредности, потребно је да покажемо и да увек има ограничену вредност. Зарад тога, споменимо два јасна, али важна својства HG-броја:
1) Ако је $H \subseteq G$ и $\mathrm{HG}(H) = q$, онда је $\mathrm{HG}(G) \geq q$ (заправо, од посебног су интереса q-решиви графови чији ниједан подграф није q-решив);
2) Ако је G q-решив, онда је G и $(q-1)$-решив.

Наредним тврђењем ћемо доказати да је $\mathrm{HG}(K_n) = n$ (већ имамо $\mathrm{HG}(K_n) \geq n$ из тврђења 6), одакле ће на основу својства 2) следити да HG-број било ког графа мора бити ограничен. Наиме, ако је G граф на n чворова, он може имати HG-број највише n, јер би иначе имао већи HG-број од свог надграфа K_n, што по 2) није могуће.

Тврђење 7. $\mathrm{HG}(K_n) = n$.

Доказ. Остаје да покажемо да је $\mathrm{HG}(K_n)$ највише n. То ћемо учинити применом вероватносног метода. Претпоставимо супротно, да је K_n $(n+1)$-решив за неко n. Обојимо сваки од чворова униформно и независно у скупу $[n+1]$. Тада је вероватноћа да неки чвор v тачно погоди своју боју $\mathbb{P}(v) = \frac{1}{n+1}$ (јер за дате боје осталих чворова v погађа исправно само при једној сопственој боји, од $n+1$ могуће). С друге стране, како има n чворова, очекивана вредност броја чворова који исправно погађају је $\mathbb{E} = \sum_{v \in V(K_n)} \mathbb{P}(v) = \frac{n}{n+1} < 1$, па због својства математичког очекивања постоји неки избор боја чворова при коме је број чворова који тачно погађају своју боју највише једнак очекивању, односно у овом случају највише нула, дакле при било каквој стратегији постоји избор боја за које нико не погађа тачно своју боју, што је у супротности са претпоставком, дакле $\mathrm{HG}(K_n) \leq n$, па је $\mathrm{HG}(K_n) = n$. $\square$

Наредно тврђење даје једине познате тачне вредности HG-броја, поред оне за комплетан граф. Докази се могу наћи у [2] за 2.3.а) и у [13] за 2.3.б). Притом ће тврђење под а) бити и директна последица теореме 33.

Тврђење 8. *Важи:*
а) $\mathrm{HG}(T) = 2$*, где је* T *произвољно стабло;*
б) $\mathrm{HG}(C_n) = \begin{cases} 3, & n \equiv_3 0 \text{ или } n = 4 \\ 2, & \text{иначе} \end{cases}$
где је C_n *циклус над* n *чворова.*

2.1 Класична игра на мултипартитном графу

Циљ овог дела рада јесте представљање резултата из [2] који се бави HG-бројем комплетног бипартитног графа. Тај резултат је дат наредним тврђењем.

Теорема 9. $\mathrm{HG}(K_{n,\dots,n}) = \Omega(n^{\frac{r-1}{r} - o(1)})$*, где се* n *у индексу* K *појављује* r *пута, и где је то ознака за комплетан* r*-партитни граф са* n *чворова у сваком делу.*

За доказ ове теореме потребно нам је неколико лема и дефиниција које ћемо дати у наставку.

Дефиниција 10. *Хемингово растојање тачака* $x, y \in [q]^m$ *је број координата у којима се разликују, у ознаци* $d(x, y)$*. Хемингова лопта са центром у* a *полупречника* r*, у ознаци* $B_r(a)$*, јесте скуп свих тачака у* $[q]^m$ *које су на Хеминговом растојању највише* r *од* a*.*

За дату стратегију f и бојење χ скупа чворова S ћемо писати $\phi_{f,\chi}(S) = 1$ ако барем један чвор исправно погађа своју боју, а $\phi_{f,\chi}(S) = 0$ иначе. Уколико је из контекста јасно о којој је стратегији и бојењу реч, изостављаћемо индекс ϕ.

Лема 11. *Нека је* $K_{m,n}$ *бипартитни граф, и нека је* V_n *скуп чворова његовог десног дела. Нека је* χ *бојење чворова* $K_{m,n}$*, и нека је притом* $\chi(V_n) \in [q]^n$ *уређена* n*-торка боја чворова десног дела. Тада је* $K_{m,n}$ q*-решив ако постоји стратегија десног дела за коју важи да је при сваком бојењу* χ*,* $\chi(V_n) = y$*, скуп* $\mathcal{C}_y = \{x \in [q]^m | \chi(V_n) = y, \chi(V_m) = x \implies \phi_\chi(V_n) = 0\}$ *цео садржан у* $B_{m-1}(a^y)$ *за неко* $a^y \in [q]^m$*.*

Доказ. Уочимо неку стратегију која задовољава услове и $\chi(V_n) = y$. Нека леви део V_m погађа следећом стратегијом: за a^y дефинисано усовима, $b_i \in V_m$ погађа a_i^y ($V_m = \{b_1, ..., b_m\}$). Ако је $\phi(V_n) = 1$, готови смо, иначе $\phi(V_n) = 0$, па $\chi(V_m) = x \in \mathcal{C}_y \subseteq B_{m-1}(a^y)$, па је $d(a^y, x) \leq m-1$, односно за бар једну координату је $x_i = a_i^y$ (јер би иначе све координате биле различите, тј. Хемингово растојање би било m). $\square$

Овом лемом смо видели да испитивање решивости бипартитног графа можемо свести на испитивање припадности одређеног скупа подбојења некој Хеминговој лопти. То значи да су та подбојења релативно близу по Хеминговом растојању, те да их можемо сва прекрити одговарајућом стратегијом. Сада ћемо ову идеју проширити и на графове са више делова.

Лема 12. *Било који скуп највише* m *вектора у* $[q]^m$ *садржан је у некој Хеминговој лопти полупречника* $m - 1$*.*

Доказ. Посматрајмо $B_{m-1}(x)$, за $x = (x_1^1, ..., x_m^m)$, где су $x^1, ..., x^m$ дати вектори у $[q]^m$. Како је тада $x_i = x_i^i$, важи $d(x, x^i) \leq m - 1$, ови вектори су заиста садржани у $B_{m-1}(x)$. $\square$

Дефиниција 13. *Граф је делимично q-решив према скупу бојења $\mathcal{C} \subseteq [q]^m$ ако постоји стратегија при којој бар један чвор тачно погађа боју, и при томе су сва дозвољена бојења графа из скупа $\mathcal{C}$.*

Дефиниција 14. *Нека су дати $\mathcal{C} \subseteq [q]^{rm}$ и $y \in [q]^m$. Бојење суфикса y у скупу $\mathcal{C}$ је било које бојење из скупа $\operatorname{Suf}_{\mathcal{C}} y = \{x \in [q]^{(r-1)m} | (x, y) \in \mathcal{C}\}$.*

Лема 15. *За $q, m, r \geq 1$, r-партитни $K_{m,\dots,m}$ је делимично q-решив према било ком $\mathcal{C} \subseteq [q]^{rm}$, $|\mathcal{C}| \leq m^r$.*

Доказ. Доказ вршимо индукцијом по r.
База: $r = 1$ Тада имамо празан граф на m чворова и $|\mathcal{C}| \leq m$, па по леми 12 постоји Хемингова лопта која садржи $\mathcal{C}$, $B_{m-1}(a)$ за неко $a \in [q]^m$. Нека чвор i погађа боју a_i. Како је $\mathcal{C} \subseteq B_{m-1}(a)$, бар један члан сваког бојења је исти као одговарајућа координата a, ако чворови погађају баш координате a, бар један ће тачно погодити.
Индуктивни корак: Претпоставимо да тврђење важи за $r - 1$, докажимо га за $r \geq 2$. Издвојмо један део, нека је то V, док све остале делове сврставамо у подграф U који је заправо $(r-1)$-партитни $K_{m,\dots,m}$. Посматрајмо бојења $y \in [q]^m$ дела V таква да $|\operatorname{Suf}_{\mathcal{C}} y| > m^{r-1}$, и сврстајмо их у скуп $\mathcal{Y}$. Тих бојења је највише m, јер је иначе премашен број бојења у $|\mathcal{C}|$.

Вршимо следећу стратегију: чворови из V играју као у бази (бирају a_i; a се бира као центар покривајуће B_{m-1} за $\mathcal{Y}$ са највише m елемената, зато и постоји $B_{m-1}(a)$). Ако бојење из $\mathcal{C}$ индукује на V неко бојење из $\mathcal{Y}$, стратегијом бар један чвор у V погађа исправно своју боју. У супротном, због начина избора $\mathcal{Y}$, ако је на V индуковано бојење $y \notin \mathcal{Y}$, имамо $|\operatorname{Suf}_{\mathcal{C}} y| \leq m^{r-1}$. Али тада на чворове U примењујемо стратегију хипотезе која је тачна за $(r-1)$-партитни $K_{m,\dots,m}$, што U и јесте, и то над скупом $\operatorname{Suf}_{\mathcal{C}} y$ кардиналности највише m^{r-1}. У том случају бар један чвор U исправно погађа своју боју, па је стратегија добра у сваком од случајева. □

Стратегију чворова десног дела V_n можемо представити матрицом $n \times q^m$, где редови одговарају чворовима V_n, а колоне бојењима V_m, док је у пољу (i, j) боја коју претпоставља i-ти чвор за j-то бојење V_m. Сада ћемо видети у каквој су вези решивост мултипартитног графа и својство t-засићености матрице.

Дефиниција 16. *За матрицу $M_{n \times l}$ са елементима у $[q]$ кажемо да је t-засићена ако за сваки скуп $T \subseteq [l]$ од t колона постоји r тако да је $\{M_{r,i} | i \in T\} = [q]$.*

Лема 17. *Ако постоји $n \times q^{(r-1)m}$ t-засићена матрица M над $[q]$, $t \leq m^{r-1}$, онда је комплетни r-партитни $K_{m,\dots,m,n}$ q-решив.*

Доказ. Поделимо граф у део V_n од n елемената и све остале ставимо у V_m која је стога $K_{m,\dots,m}$. Чворови V_n погађају по матричној стратегији M. Посматрајмо неко бојење V_n, $y \in [q]^n$. Скуп $\mathcal{C}_y$ дефинисан као у леми 11 је кардиналности највише $t - 1$: када би било $|\mathcal{C}_y| \geq t$, за бар t бојења V_m не би постојао чвор који исправно погађа. С друге стране, због t-засићености би постојао чвор који узима све вредности $[q]$ када је V_m обојено тим бојењима, па би у бар једном погађао баш ону боју којом је обојен, односно то бојење не би припадало $\mathcal{C}_y$, контрадикција. Ако, дакле, чвор из V_n за дато y погоди своју боју, стратегија ради. У супротном, бојење је из $(\mathcal{C}_y, y)$, па рестрикција бојења на V_m има највише $t - 1 \leq m^{r-1}$, те је по леми 15 V_m делимично q-решив над $\mathcal{C}_y$, односно када је бојење такво да нико из V_n не погоди, погодиће бар неко из V_m. □

Остаје још да видимо колико велику t-засићену матрицу можемо наћи за дате параметре.

Лема 18. *Нека су $n, k, l \in \mathbb{Z}$. Тада за $t \geq q \ln q$, $n \times l$ t-засићена матрица са елементима у $[q]$ постоји за*

$$l \leq 2^{\frac{-t}{t-1}} \left(\frac{1}{q} e^{\frac{t}{q}} \right)^{\frac{n}{t-1}}.$$

Доказ. Посматрајмо матрицу $M_{n \times 2l}$ са елементима униформно и независно бираним над $[q]$. За скуп S од t колона из M и произвољни ред r, са $r_r(S)$ означавамо рестрикцију реда r на S. За фиксирано S сада имамо:

$$\mathbb{P}(r_r(S) \neq [q]) = \mathbb{P}((\exists a \in [q]) a \notin r_r(S)) \leq q \Big(1 - \frac{1}{q} \Big)^t$$

јер је вероватноћа да су сва поља $r_r(S)$ у било којој сем једној боји једнака $(1 - \frac{1}{q})$. Када не би било преклапања случајева, то бисмо просто сабрали по свих q боја, због чега имамо мање или једнако. Према томе, вероватноћа да S не засићује M је највише $\Big(q(1 - \frac{1}{q})^t \Big)^n = q^n (1 - \frac{1}{q})^{tn}$ (пошто има n редова и ниједан не сме да буде засићен са S), па је очекивани број скупова S који не засићују M ограничен одозго са $(2l)^t q^n (1 - \frac{1}{q})^{tn}$. Даље је због услова леме, након степеновања са $t-1$ и пребацивања на одговарајућу страну неједнакости:

$$l^t 2^t \Big(\frac{1}{q} e^{\frac{t}{q}} \Big) \leq l$$

$$(2l)^t q^n \Big(e^{-\frac{t}{q}} \Big)^n \leq l$$

Користећи познату неједнакост $(1-p)^m \leq e^{-mp}$, имамо:

$$(2l)^t q^n \Big(1 - \frac{1}{q} \Big)^t n \leq l$$

Како је са леве стране последње неједнакости горње ограничење за очекивани број скупова S који не засићују M, при датим условима постоји матрица M са највише l таквих скупова S. Сада можемо из M избацити по једну колону из сваког од тих скупова, при чему M постаје t-засићена и остаје барем l колона у M, што нам је и требало за доказ леме. □

Следећа теорема комбинује претходно добијене резултате дајући доње ограничење за HG-број мултипартитног графа.

Теорема 19. *За дато $r \geq 2$ и r-партитни $K_{m,\ldots,m,n}$ постоји константа c таква да за све $q \geq 2$ и $m = (2q \ln q)^{\frac{1}{r-1}}$, $n = cr(q \ln q)^{\frac{r}{r-1}}$ је $\mathrm{HG}(K_{m,\ldots,m,n}) \geq q$.*

Доказ. По леми 18, постоји $n \times q^{(r-1)m}$ t-засићена матрица M над $[q]$ са $n = cr(q \ln q)^{\frac{r}{r-1}}$, $l = q^{(r-1)m}$, $m = (2q \ln q)^{\frac{1}{r-1}}$, $t = 2q \ln q$, за неко c, јер је

$$l = q^{(r-1) 2^{\frac{1}{r-1}} (q \ln q)^{\frac{1}{r-1}}} \leq \frac{1}{4} q^{\frac{c}{2} (q \ln q)^{\frac{1}{r-1}}} \leq$$

$$\leq 2^{\frac{-t}{t-1}} \Big(\frac{1}{q} e^{\frac{2qlnq}{q}} \Big)^{\frac{cr(q \ln q)^{\frac{r}{r-1}}}{2q \ln q - 1}} = 2^{\frac{-t}{t-1}} \Big(\frac{1}{q} e^{\frac{t}{q}} \Big)^{\frac{n}{t-1}}$$

а прва неједнакост јасно важи за неко c независно од вредности q. Како је тада $t = m^{r-1}$, по леми 17 је $\mathrm{HG}(K_{m,\ldots,m,n}) \geq q$. □

Доказ теореме 9. Узмимо $n = cr(q\ln q)^{\frac{r}{r-1}}$, где је c константа независна од q дефинисана теоремом 19 која нам даје $\mathrm{HG}(K_{m,...,m,n}) \geq q$ за $m = (2q\ln q)^{\frac{1}{r-1}}$. Како је онда $m = o(n)$, $K_{m,...,m,n}$ је подграф $K_{n,...,n,n}$, па је и $\mathrm{HG}(K_{n,...,n,n}) \geq \mathrm{HG}(K_{m,...,m,n})$. Даље је $q\ln q = \left(\frac{n}{cr}\right)^{\frac{r-1}{r}}$, па је $q = \Omega(n^{\frac{r-1}{r}-o(1)})$. Коначно, комбинујући добијене неједнакости, $\mathrm{HG}(K_{n,...,n,n}) = \Omega(n^{\frac{r-1}{r}-o(1)})$. □

2.2 Мултипартитни усмерени циклус

У овом делу ћемо представити још један резултат из [2], који се односи на мултипартитне усмерене циклусе. Ако је граф видљивости из дефиниције 5 усмерен, сматрамо да дати чвор види само чворове који су његови излазни суседи (тј. ако $(u,v) \in E$, чвор u види чвор v, али v не види u).

Дефиниција 20. *$\vec{C}_{n_1,...,n_r}$ је комплетни усмерени r-партитни циклус са деловима $V_1,...,V_r$ таквим да је $|V_i| = n_i$ и да гране постоје само између суседних делова, тј. $(u,v) \in E \Leftrightarrow \big(u \in V_i, v \in V_j, (j = i+1 \vee (i,j) = (r,1))\big)$.*

Лема 21. *Било који скуп $\mathcal{C}$ кардиналности највише $e^{\frac{m}{q}}$ је садржан у некој B_{m-1}.*

Доказ. Бирамо a, центар B_{m-1}, униформно на $[q]^m$. За $x \in \mathcal{C}$, $\mathbb{P}(d(a,x) = m) = (1-\frac{1}{q})^m$ (јер је $1-\frac{1}{q}$ вероватноћа да се x и a разликују у некој датој координати), па је

$$\mathbb{P}\big(\bigvee_{x\in\mathcal{C}} d(a,x) = m\big) \leq |\mathcal{C}|(1-\frac{1}{q})^m < |\mathcal{C}|e^{-\frac{m}{q}} \leq 1$$

па са позитивном вероватноћом сви x су на Хеминговом растојању највише $m-1$ од a, тј. сви x су у $B_{m-1}(a)$. □

Лема 22. *Ако постоји $r-1$ матрица $A_1,...,A_{r-1}$ матрица за које важи:*
i) *$\forall 1 \leq i \leq r-1$, A_i је $n_i \times q^{n_{i+1}}$ t_i-засићена матрица над $[q]$ и*
ii) *$\prod_{i=1}^{r-1} t_i \leq e^{\frac{n_r}{q}}$*
онда је комплетни r-партитни усмерени циклус $\vec{C}_{n_1,...,n_r}$ q-решив.

Доказ. За $1 \leq i \leq r-1$, чворови из V_i погађају по матричној стратегији A_i. Посматрајмо бојења у којима не погађа нити један чвор V_i, $1 \leq i \leq r-1$. Посматрајмо даље $\mathcal{C}_{x^i} = \{y \in [q]^{n_{i+1}} | \chi(V_i) = x^i, \chi(V_{i+1}) = y \implies \phi(V_i) = 0\}$.
Ако ниједан чвор у $\bigcup_{i=1}^{r-1} V_i$ не погађа, имамо да је $x^r \in \mathcal{C}_{x^{r-1}}$, $x^{r-1} \in \mathcal{C}_{x^{r-2}}$ ... $x^2 \in \mathcal{C}_{x_1}$, тј. сви такви x^r су у

$$S = \bigcup_{x^2\in\mathcal{C}_{x^1}} \bigcup_{x^3\in\mathcal{C}_{x^2}} ... \bigcup_{x^{r-1}\in\mathcal{C}_{x^{r-2}}} \mathcal{C}_{x^{r-1}}$$

Како је A_i t_i-засићена, важи да је $|C_{x^i}| < t_i$ (из разлога који је дат у доказу леме 17) и да је величина скупа S највише $|\mathcal{C}_{x^1}|...|\mathcal{C}_{x^{r-1}}| < \prod_{i=1}^{r-1} t_i \leq e^{\frac{n_r}{q}}$, па по леми 21 постоји $B_{n_r-1}(a)$ која покрива S, због чега i-ти чвор V_r може погађати a_i, па ако ниједан од чворова из других делова не погађа тачно, бар један од чворова из V_r ће погодити тачно. □

Теорема 23. *За $r \geq 3$, $q \geq 2$ и $n_i = (r-1)\ln(2q\ln q)(4\ln q)^{r-i}q^{r+1-i}$, $1 \leq i \leq r$ је $\mathrm{HG}(\vec{C}_{n_1,...,n_r}) \geq q$.*

Доказ. Приметимо да је $n_i = n_{i+1}(4q\ln q)$. Узмимо $t_i = 2q\ln q$ за све $1 \le i \le r-1$, онда је

$$q^{n_{i+1}} \le \frac{1}{4}q^{2n_{i+1}} \le 2^{\frac{-t}{t-1}} q^{\frac{n_{i+1}(4q\ln q)}{2q\ln q}} \le 2^{\frac{-t}{t-1}} \left(\frac{1}{q}e^{\frac{t}{q}}\right)^{\frac{n_i}{t-1}}$$

па применом леме 18 добијамо да постоји $n_i \times q^{n_{i+1}}$ t_i-засићена матрица над $[q]$ за све $1 \le i \le r-1$. Означимо те матрице са A_i, оне онда задовољавају услов i) леме 22, па остаје још да одаберемо n_r тако да буде задовољен услов ii). Како је:

$$\prod_{i=1}^{r-1} t_i = (2q\ln q)^{r-1} = e^{(r-1)\ln(2q\ln q)}$$

можемо узети $n_r = (r-1)q\ln(2q\ln q)$. Тада нам лема 22 даје q-решивост $\vec{C}_{n_1,\ldots,n_r}$. □

Теорема 24. $\mathrm{HG}(\vec{C}_{n,\ldots,n}) = \Omega(n^{\frac{1}{r}-o(1)})$*, где се n у индексу $\vec{C}$ појављује r пута.*

Доказ. Ако узмемо n_i-ове дефинисане претходном теоремом, имамо $\mathrm{HG}(\vec{C}_{n_1,\ldots,n_r}) \ge q$, а како је $n_i > n_j$ за $i < j$, добијамо да је $n_1 = n$ највећи од n_i-ова, па је $\vec{C}_{n_1,\ldots,n_r}$ подграф $\vec{C}_{n,\ldots,n}$, па је и $\mathrm{HG}(\vec{C}_{n,\ldots,n}) \ge \mathrm{HG}(\vec{C}_{n_1,\ldots,n_r}) \ge q = \Omega(n^{\frac{1}{r}-o(1)})$, што добијамо аналогно као у доказу теореме 9. □

2.3 Усмерени графови

У овом делу ћемо приказати један резултат из [9] којим се ограничава HG-број усмерених графова.

Теорема 25. *Нека је $\vec{G}$ усмерени граф на n чворова са ацикличним индукованим подграфом величине I. Тада $\vec{G}$ није q-решив ако је $(n-I)\left(\frac{q}{q-1}\right)^I < q$.*

Доказ. Нека је A скуп чворова који индукују ациклични подграф величине I, и нека је f стратегија којом чворови погађају. Обојимо све чворове $\vec{G}$ униформно и независно у скупу $[q]$. Изаберимо произвољан чвор v ван A и нађимо вероватноћу да v исправно погађа под условом да ниједан чвор из A не погађа исправно, у ознаци $\mathbb{P}(\phi(v) = 1|\phi(A) = 0)$. Имамо да је по дефиницији $\mathbb{P}(\phi(v) = 1|\phi(A) = 0) = \frac{\mathbb{P}(\phi(v)=1\wedge\phi(A)=0)}{\mathbb{P}(\phi(B))}$.

Нађимо прво $\mathbb{P}(\phi(A) = 0)$. Фиксирајмо неко бојење чворова ван A. Уочимо најдужи пут $u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_l$ у A и посматрајмо његов последњи чвор u_l. Када би постојао неки његов излазни сусед u у I (тј. чвор u такав да усмерена грана (u_l, u) постоји у $\vec{G}$), онда би он морао бити један од чворова из најдужег пута, јер бисмо иначе имали дужи пут с крајем у u. С друге стране, ако је u један од чворова из пута, онда бисмо имали усмерени циклус $u_l \longrightarrow u = u_i \longrightarrow u_{i+1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow v_l$, што је немогуће због услова да је индуковани подграф на A ацикличан. Према томе, сви излазни суседи u_l морају бити ван A, односно сви чворови које u_l види су ван A, па u_l можемо обојити у било коју од $q-1$ могућих боја, тј. не можемо само у једну, ону коју би по стратегији f погађао на основу боја које види, а које су све познате. Ако сад изаберемо неку од тих доступних боја, и посматрамо индуковани подграф над $A \setminus \{u_l\}$ (који остаје ацикличан), понављамо претходни поступак и смањујемо A све док не остане празан скуп. Притом у сваком кораку имамо тачно $q-1$ дозвољену боју за тренутни крајњи чвор у изабраном најдужем путу, а како чворова у A има I, то даје да постоји тачно $(q-1)^I$ дозвољених бојења A, тј. оних у којима ниједан чвор не погађа исправно. С друге стране, укупан број различитих бојења A је q^I, па је за дато бојење чворова ван A тражена вероватноћа $\frac{(q-1)^I}{q^I}$, а како су сва та бојења једнако вероватна (због униформности и независности бојења чворова), имамо да је и $\mathbb{P}(\phi(A) = 0) = \left(\frac{q-1}{q}\right)^I$.

Јасно је $\mathbb{P}(\phi(v) = 1 \wedge \phi(A) = 0) \leq \mathbb{P}(\phi(v) = 1) = \frac{1}{q}$, па је $\mathbb{P}(\phi(v) = 1 | \phi(A) = 0) \leq \left(\frac{q}{q-1}\right)^I \frac{1}{q}$. Означимо сада са X случајну променљиву која представља број чворова $\vec{G}$ који исправно погађају своју боју. Нека је $\mathbf{1}(\phi(v) = 1)$ индикаторска случајна променљива за догађај да чвор v исправно погађа. Тада имамо за очекивану вредност X под условом да ниједан чвор из A не погађа тачно:

$$\mathbb{E}(X|\phi(A) = 0) = \mathbb{E}\Big(\sum_{v \in V(\vec{G})} \mathbf{1}(\phi(v) = 1)|\phi(A) = 0)\Big) =$$

$$= \sum_{v \in V(\vec{G})} \mathbb{E}\big(\mathbf{1}(\phi(v) = 1)|\phi(A) = 0\big) =$$

$$= \sum_{v \in A} \mathbb{P}(\phi(v) = 1|\phi(A) = 0) + \sum_{v \in V(\vec{G}) \setminus A} \mathbb{P}(\phi(v) = 1|\phi(A) = 0) \leq$$

$$\leq 0 + (n - I)\Big(\frac{q}{q-1}\Big)^I \frac{1}{q} < 1$$

где последња неједнакост важи директно по условима теореме. Како X може узети само целобројне ненегативне вредности, а очекивање под условом да ниједан чвор из A не погађа је мање од 1, то мора постојати бојење графа $\vec{G}$ међу свим бојењима у којима нико из A не погађа такво да је и укупан број погодака X једнак нула. Тиме смо доказали да $\vec{G}$ заиста није q-решив. □

Последица 26. *Усмерени граф са ацикличним индукованим подграфом величине I је q-решив само ако има барем $I + q\left(1 - \frac{1}{q}\right)^I$ чворова.*

Последица 27. *Ако усмерени граф на n чворова има ациклични индуковани подграф са бар $\frac{n}{2}$ чворова, онда је он q-решив само ако је $n \geq 2\alpha(q-1)$, где је $\alpha \approx 0.5675$ реалан број који задовољава једначину $\alpha + \ln \alpha = 0$.*

Доказ. Претпоставимо да је $n < 2\alpha(q-1)$ и нека је $t = \frac{n}{2q} < \alpha\frac{q-1}{q}$. Тада је $\ln t + t\frac{q}{q-1} < \ln \alpha + \ln \frac{q-1}{1} + \alpha = \ln \frac{q-1}{q} < 0$, и имајући $e > (1 + \frac{1}{q-1})^{q-1}$, добијамо:

$$0 > \ln t + t\frac{q}{q-1} > \ln t + tq \ln\Big(1 + \frac{1}{q-1}\Big) \implies$$

$$\implies 1 > t\Big(1 + \frac{1}{q-1}\Big)^{iq} \implies q > \frac{n}{2}\Big(\frac{q}{q-1}\Big)^{\frac{n}{2}}$$

па на основу претходне теореме закључујемо да граф са $n < 2\alpha(q-1)$ заиста није q-решив. □

2.4 HG-број и други параметри

Наредном дефиницијом дајемо својство графа које је сродно минималном и максималном степену чвора у томе што на неки начин ограничава број суседа сваког чвора.

Дефиниција 28. *Граф G је d-дегенерисан ако његове чворове можемо поставити у низ тако да сваки чвор има највише d суседа међу чворовима лево од себе.*

Природно питање које се намеће јесте како је HG-број повезан са другим графовским параметрима, пре свега максималним степеном чвора $\Delta(G)$, минималним степеном $\delta(G)$ и дегенерисаношћу графа $d(G)$. Засад је одговор познат само на питање о максималном степену, док ћемо одговору на питање о дегенерисаности донекле прићи теоремом 33. Да ли је HG-број и на који начин ограничено одоздо неком функцијом минималног степена чвора (која тежи бесконачности како δ тежи бесконачности) остаје у потпуности отворено.

2.4.1 HG-број и максимални степен чвора

Да бисмо нашли везу $\mathrm{HG}(G)$ и $\Delta(G)$, искористићемо наредну познату лему чији се доказ може наћи у [3].

Дефиниција 29. *Догађај A је узајамно независан од скупа догађаја $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_n\}$ ако је било који A независан од пресека било ког подскупа $\mathcal{A}$.*

Лема 30. ***(Ловасова локална лема)*** *Нека су $A_1, ..., A_n$ догађаји у произвољном простору вероватноће. Претпоставимо да је сваки A_i узајамно независан од скупа свих осталих догађаја A_j сем њих највише d, и да је $\mathbb{P}(A_i) \leq p$ за све $1 \leq i \leq n$. Ако је $epd \leq 1$, онда је $\mathbb{P}(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i^C) > 0$.*

Теорема 31. *Ако је Δ максимални степен чвора у G, онда је $\mathrm{HG}(G) < e\Delta$.*

Доказ. Нека су $v_1, ..., V_n$ чворови G. Доделимо свим чворовима боје из скупа $[q]$ униформно и независно. За дату стратегију чворова, нека је A_i догађај да v_i исправно погађа своју боју. Тада је довољно да покажемо да се за $q \geq e\Delta$ са позитивном вероватноћом не јавља нити један од догађаја A_i.

Нека је $N_i = \mathrm{Nbr}(v_i)$. Показаћемо да је A_i узајамно независан од $\mathcal{M}_i = \{A_j | j \in [n] \setminus \{j\}, v_j \notin N_i\}$. Тада ће сваки A_i бити узајамно независан са скупом свих осталих догађаја сем највише Δ њих, колико највише има суседа v_i. Како је притом за све i, $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{q}$, имали бисмо да важи $e\Delta\frac{1}{q} \leq 1$, па би по Ловасовој локалној леми $\mathbb{P}(\bigwedge_{i=0}^{n} A_i^C) > 0$, односно ниједан чвор не погађа исправно са позитивном вероватноћом, па не може бити $\mathrm{HG}(G) = q \geq e\Delta$.

Остаје, дакле, да за свако i покажемо узајамну независност A_i од $\mathcal{M}_i$. Нека је $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_i$ произвољан подскуп.

$$\mathbb{P}(A_i \wedge (\bigwedge_{j\in\mathcal{M}} A_j)) = \sum_{y\in[q]^{|N_i|}} \mathbb{P}(A_i \wedge (\bigwedge_{j\in\mathcal{M}} A_j) | \chi(N_i) = y)\mathbb{P}(\chi(N_i) = y) =$$

$$= \sum_{y\in[q]^{|N_i|}} \mathbb{P}(A_i | \chi(N_i) = y)\mathbb{P}(\bigwedge_{j\in\mathcal{M}} A_j | \chi(N_i) = y)\mathbb{P}(\chi(N_i) = y) =$$

$$= \mathbb{P}(A_i) \sum_{y\in[q]^{|N_i|}} \mathbb{P}(\bigwedge_{j\mathcal{M}} A_j | \chi(N_i) = y)\mathbb{P}(\chi(N_i) = y) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(\bigwedge_{j\in\mathcal{M}} A_j)$$

где друга једнакост важи јер је за дато бојење суседства $\chi(N_i) = y$, чвор v_i одвојен од несуседних чворова и исход његовог погађања не зависи од исхода погађања несуседних чворова; трећа једнакост важи јер је $\mathbb{P}(A_i | \chi(N_i) = y) = \mathbb{P}(A_i)$ због тога што чворове бојимо независно и униформно, па ће v_i бити обојен баш оном бојом коју индукује његова стратегија за дато бојење суседства. □

2.5 Брисање чворова

Дефиниција 32. *Артикулационим чвором v у графу G називамо чвор чијим се брисањем повећава број компоненти повезаности у графу G.*

Оно што нас може занимати јесу услови при којима из графа G можемо обрисати неки чвор, грану и слично, а да HG-број остане непромењен. Први резултат на ову тему, добијен у [2], показује да се у q-решивом графу за $q \geq 3$ могу обрисати чворови степена 1 без промене решивости (што за своју директну последицу има и резултат 8а)). Овде ћемо дати наш допринос теми тако што ћемо то тврђење проширити на брисање довољно малих компоненти индукованих артикулационим чвором.

Теорема 33. *Нека је G q-решив граф на n чворова такав да постоји његов артикулациони чвор v такав да нека од компоненти повезаности у $G \setminus \{v\}$ има мање од $\frac{q}{2}$ чворова. Тада је и G без чворова из те компоненте q-решив.*

Доказ. Нека су $\{v_0...v_{k-1}\}$ чворови те компоненте, уз $k < \frac{q}{2}$, и нека је $v_k = v$, и остали чворови G су индексирани са $k+1...n-1$. Нека је G' граф са истим скупом чворова као G и чији је G подграф, тако да у G' постоје све могуће гране између чворова $v_0...v_k$ (G' је, дакле, унија G и комплетног графа над чворовима $v_0...v_k$). Довољно је показати да, ако је G' q-решив, онда је и $G' \setminus \{v_0...v_{k-1}\}$ (јер ако је G q-решив, онда је и G' као његов надграф, па ће по доказу и $G' \setminus \{v_0...v_{k-1}\}$ бити q-решив, па ће и $G \setminus \{v_0...v_{k-1}\}$, јер је $G \setminus \{v_0...v_{k-1}\} = G' \setminus \{v_0...v_{k-1}\}$).

Према томе, можемо без умањења општости претпоставити да у G постоје све гране између чворова $v_0...v_{k-1}$. То да је G q-решив је еквивалентно да је за неку стратегију $(f_0...f_{n-1})$, $F(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x_i - f_i(x))$ идентички нула за $x \in [q]^n$ (притом вредност f_i зависи само од x_j за оне j за које $v_j \in \mathrm{Nbr}(v_i)$). Нека су $f'_i : [q]^{n-k} \longrightarrow [q]$, $i = k+1, ..., n-1$ функције погађања дефинисане за $G \setminus \{v_0...v_{k-1}\}$ тако да је за све $x' \in [q]^{n-k}$, $f'_i(x') = f_i(x)$, где је $x_j = x'_j$, $j = k...n-1$ (једноставности ради, појединачне боје у $x' \in [q]^{n-k}$ индексирамо са $k...n-1$). Ове функције су коректно дефинисане јер за дато x', шта год да су првих k боја у одговарајућем x, $f_i(x)$ за дато $i = k+1...n-1$ ће имати исту вредност, пошто f_i не зависи од тих првих k боја, јер $v_0...v_{k-1}$ нису суседи v_i. Циљ је наћи f'_k тако да је $F'(x') = (x'_k - f'_k(x'))\prod_{i=k+1}^{n-1}(x'_i - f'_i(x')) = (x'_k - f'_k(x'))H'(x')$ идентички нула за $x' \in [q]^{n-k}$, где F' одговара графу $G \setminus \{v_0...v_{k-1}\}$, па не зависи од боја чворова $v_0...v_{k-1}$.

Нека је $X' = \{x' \in [q]^{n-k} | H'(x') \neq 0\}$. Тада за све $x' \in X'$ мора бити $x'_k - f'_k(x') = 0$, јер иначе F' не би била идентички нула. Према томе, треба доказати да ни за која два $x', x'' \in X'$ не важи $x'_k \neq x''_k$ и $x'_i = x''_i$, за све i такве да је $k < i < n$ и v_k и v_i су суседи у G, јер би тада за једно исто бојење суседа v_k у $G \setminus \{v_0...v_{k-1}\}$ било потребно да v_k узме две различите боје како би се сва бојења $G \setminus \{v_0...v_{k-1}\}$ била покривена победничком стратегијом, што свакако није могуће. Претпоставимо супротно, да постоје такви x' и x''. Нека је тада

$$A' = \{a \in [q]^k | x'_k - f_k(a^\frown x') = 0\}$$

$$A'' = \{a \in [q]^k | x''_k - f_k(a^\frown x) = 0\}$$

где је $(\cdot^\frown\cdot)$ бинарна операција конкантенације уређених торки.

Проценимо кардиналност скупова A' и A''. За дати $t \in X'$ важи да је $H'(t) \neq 0$, па је и $H(a^\frown t) \neq 0$ за све $a \in [q]^k$, где је $H(x) = \prod_{i=k+1}^{n-1}(t_i - f_i(x))$, за $x \in [q]^n$ (јер чиниоци у $H(x)$, па самим тим ни $H(x)$, не зависе од $x_0...x_{k-1}$). Али како је $F(a^\frown t) = 0$ за све $(a^\frown t) \in [q]^n$, то мора бити за дато $t \in X'$, $x_i - f_i(a^\frown t) = 0$ за бар неко $0 \leq i \leq k$. Како је t_k фиксирано, а сваки од чворова $v_0...v_{k-1}$ је повезан само са другим чворовима из тог скупа и чвором v_k, тј. са тачно k других чворова од којих је једном боја фиксирана, то је сваки од полинома $a_i - f_i$ за $0 \leq i < k$ једнак нула за највише q^{k-1} избора

$a \in [q]^k$, па је $\prod_{i=0}^{k-1}(a_i - f_i(a^\frown t) = 0$ за највише kq^{k-1} избора $a \in [q]^k$, па једини преостали чинилац F, $(t_k - f_k(a^\frown t))$ мора бити нула за барем $q^k - kq^{k-1}$ избора $a \in [q]^k$ за фиксирано $t \in X'$ (односно мора бити нула у свим преосталим изборима a). Према томе, $|A'|, |A''| \geq q^k - kq^{k-1} = q^{k-1}(q-k) > q^{k-1}(q - \frac{q}{2}) = \frac{q^k}{2}$, па зато A' и A'' имају непразан пресек по Дирихлеовом принципу, узевши у обзир да је $A', A'' \subseteq [q]^k$.

Нека $a \in A' \cap A''$, тада је због дефиниције та два скупа,

$$x'_k = f_k(a^\frown x') = f_k(a^\frown x) = x''_k$$

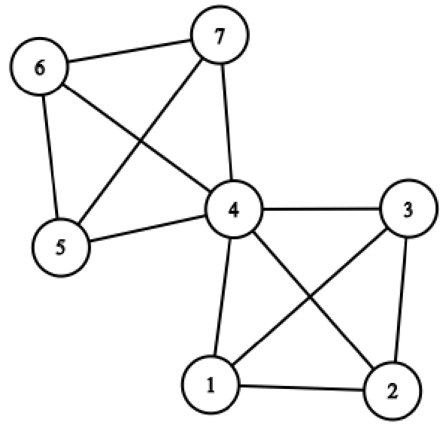
где друга једнакост важи јер f_k зависи само од a, које је једнако с обе стране једнакости, и појединих индекса у x' и x'', који су пак такви да су за те i, $x'_i = x''_i$, али како онда добијамо $x'_k = x''_k$, добили смо контрадикцију, односно можемо наћи исправно дефинисану функцију f'_k која за све $x' \in [q]^{n-k}$ за које $H'(x')$ није нула погађа боју x'_k (јер смо доказали да свако могуће $x' \in X'$ одговара тачно једној вредности из домена функције f'_k, што су боје суседа v_k у $G \setminus \{v_0 ... v_{k-1}\}$). Тиме смо нашли F' које је идентички нула, што завршава доказ. □

Сада можемо поставити занимљиво питање. Наиме, претходном теоремом смо доказали да се довољно мале компоненте индуковане артикулационим чвором у G могу обрисати, али интересује нас колико је заправо та граница за величину компоненте оштра, односно можемо ли обрисати и веће компоненте без промене решивости датог графа. На први поглед бисмо могли рећи да је одговор потврдан, јер артикулациони чвор представља својеврсно „сужење“ у протоку информација између две компоненте, односно могли бисмо помислити да, ма колико били велики HG-бројеви две компоненте графа G, HG-број самог графа G не може бити никако већи од појединачних HG-бројева његових компоненти. То је стога што тај артикулациони чвор наизглед онемогућава да једна компонента види било шта из друге компоненте, и у складу с тим онемогућава да једна компонента стратегије својих чворова заснива и на другој компоненти и тиме можда повећа свој HG-број. Из овог разлога је посебно интересантно то што се испоставља да је одговор на постављено питање заправо одричан, односно релативно велике компоненте не можемо обрисати из графа и тврдити да се његов HG-број није потврдио. Следећим тврђењем, дакле, показујемо да је резултат теореме 24 оштар.

Тврђење 34. *Граф G на слици 1. има* $\mathrm{HG}(G) \geq 5$.

Доказ. Означимо $\chi(v_i) = x_i$. Чворови v_1, v_2, v_3 погађају под претпоставком да је $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ једнако редом $2, 3, 4$ по модулу 5. Слично, чворови v_5, v_6, v_7 погађају под претпоставком да је $x_4 + x_5 + x_6 + x_7$ једнако редом $1, 3, 4$ по модулу 5. То значи да ниједан од чворова $x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7$ не погађа тачно само када је збир боја прва четири чвора 0 или 1 по модулу 5, и уједно збир боја последња четири чвора 0 или 2 по модулу 5. Означимо сада $x = x_1 + x_2 + x_3$, $y = x_5 + x_6 + x_7$ и $d = x_3$. Имамо, дакле, да ниједан од x_i, $i \neq 3$, не погађа тачно за $x + d \in \{0, 1\}$ и $y + d \in \{0, 2\}$, па да би G био 5-решив, своју боју тада мора тачно да погоди управо v_3. Да би v_3 то могао да учини, довољно је да докажемо да не постоје x, y такви да постоје два различита d_1, d_2 (по модулу 5), таква да је $x + d_1, x + d_2 \in \{0, 1\}$ и $y + d_1, y + d_2 \in \{0, 2\}$.

Претпоставимо супротно. Тада је или $(x + d_1, y + d_1, x + d_2, y + d_2) = (0, 0, 1, 2)$ или $(x + d_1, y + d_1, x + d_2, y + d_2) = (0, 2, 1, 0)$. У првом случају одузимањем првог и другог члана четворке добијамо $x - y = 0$, док одузимањем трећег и четвртог члана добијамо $x - y = 4$ (све по модулу 5), што даје контрадикцију. У другом случају слично добијамо $x - y = 3$ и $x - y = 1$, што је опет контрадикција. Како смо у оба могућа случаја дошли до контракције, она не може бити добра, дакле, у најгорем случају, за дате x и y, постоји само јединствено d за које је чвор v_3 онај који треба тачно да погоди



Слика 1: Граф G у тврђењу 34

своју боју, али самим тим он може да погађа да је његова боја баш то d, па у случају да остали чворови сви погрешно погоде, v_3 ће исправно погодити своју боју. Граф са слике је, дакле, заиста 5-решив. □

Приметимо да овај граф заиста показује да је граница у теореми 24 оштра, јер имамо да је величина обе његове компоненте повезаности које се добијају уклањањем артикулационог чвора v_3 једнака $3 = \lceil \frac{5}{2} \rceil = \lceil \frac{q}{2} \rceil \geq \frac{q}{2}$, и заиста, теорема нам не омогућава да толико велику компоненту уклонимо, што и јесте исправно, јер G има већи HG-број него што би имао без неке компоненте.

Аналогним поступком би се могло лако добити и да два комплетна графа на n чворова, за $n \geq 5$, повезана у једном чвору имају HG-број барем једнак $n+1$. Ипак, поставља се питање да ли је могуће доказати за те графове да је њихов HG-број још већи, нпр. $2n-2$ за парне n и $2n-3$ за непарне n, што и јесу највеће могуће вредности такве да се одговарајуће компоненте не могу обрисати по теореми 24, а самим тим и највеће могуће вредности HG-броја за овакву врсту графова.

3 Линеарна игра на графу

Сада ћемо приказати варијацију игре уведену у [2], као и неке нове резултате у тој варијацији.

Дефиниција 35. *Нека је G граф и q степен простог броја, и нека је $\mathbb{F}_q$ коначно поље кардиналности q. Линеарна (G, q)-игра, у ознаци $(G, q)_{lin}$-игра, представља класичну (G, q)-игру, уз ограничење да се боје чворова узимају из $\mathbb{F}_q$ и да стратегија сваког чвора може бити највише линеарни полином више променљивих над пољем $\mathbb{F}_q$ који зависи од боја чворова у суседству посматраног чвора. Ако је $(G, q)_{lin}$-игра победничка, кажемо и да је G линеарно q-решив. Линеарним* HG*-бројем графа G, у ознаци* $\mathrm{HG}_{lin}(G)$*, називамо највеће q такво да је G линеарно q-решив.*

Приметимо да (барем не тривијално) не можемо тврдити да линеарна q-решивост G не имплицира и линеарну p-решивост G за $p < q$, па самим тим можда и дефиниција линеарног HG-броја и нема много смисла. Зато би било од значаја пронаћи такав G који је линеарно q-решив, а није линеарно p-решив, за неко $p < q$, или формално доказати да се ово не може учинити. Прави смисао линеарног

HG-броја је да се моћ линеарних стратегија упореди са моћи класичних, тј. да се покаже да поједине класе графова ограничавањем на линеарне стратегије дају, негде и знатно, мање HG-бројеве него обичне стратегије.

Сада ћемо навести све до сада познате резултате у линеарној верзији игре на графу (чији се докази могу наћи у [2]).

Тврђење 36. *Имамо следеће резултате:*
а) $\mathrm{HG}_{lin}(K_q) = q$, *за степен простог броја* q.
б) $\mathrm{HG}_{lin}(C_n) = 2$ *за* $n \geq 5$ *i* $\mathrm{HG}_{lin}(C_3) = \mathrm{HG}_{lin}(C_4) = 3$;
в) $K_{n,n}$ *није* q-*решив ни за један непрви степен простог броја* q *(претпоставка изнета у [2] тврди да није решив ни за један степен простог броја* q*).*

3.1 $\mathrm{HG}_{\mathbf{lin}}$-број и дегенерисаност графа

За доказ наредне теореме из [2], која повезује дегенерисаност графа и његов $\mathrm{HG}_{\mathrm{lin}}$ број, користићемо познату лему познату као комбинаторно намештање нула (енг. *Combinatorial Nullstellensatz*), а чији се доказ може наћи у [1].

Лема 37. ***(Комбинаторно намештање нула)*** *Нека је* $\mathbb{F}$ *произвољно поље и нека је полином* $f = f(x_1, ..., x_n)$ *у* $\mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$. *Нека је* $\deg(f) = \sum_{i=1}^{n} t_i$, *где су сви* t_i *природни бројеви, и нека је коефицијент* $\prod_{i=1}^{n} x_i^{t_i}$ *у* f *ненула. Тада, ако су* $S_1, ..., S_n$ *подскупови* $\mathbb{F}$ *са* $|S_i| > t_i$, *онда постоје* $s_i \in S_i$ *такви да је* $f(s_1, ..., s_n) \neq 0$.

Теорема 38. *За било који* d-*дегенерисани граф* G *важи* $\mathrm{HG}_{lin}(G) \leq d + 1$.

Доказ. Нека је G граф на n чворова и нека је $v_1, ..., V_n$ низ његових чворова такав да је за свако $2 \leq i \leq n$, v_i повезан са највише d чворова међу $v_1, ..., v_{i-1}$. Претпоставимо супротно тврђењу теореме, тј. да је G линеарно q-решив за неки степен простог броја $q \geq d + 2$. Тада је полином $F \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ дат са

$$F(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - f_i)$$

идентички једнак нули на $\mathbb{F}_q^n$. За $1 \leq i, j \leq n$, нека је $p_i = x_i - f_i$ и пишемо $x_j \in p_i$ ако се моном x_j појављује као члан у p_i са ненула коефицијентом. Дефинишемо подскупове $P_n, ..., P_1$ рекурзивно на следећи начин. Нека је $P_n = \{p_j | x_n \in p_j\}$, а за $i = n-1, ..., 1$ је

$$P_i = \left\{ p_j \notin \bigcup_{k=i+1}^{n} P_k | x_i \in p_j \right\}$$

Приметимо да неки од P_i-ова могу бити празни, да су сви дисјунктни по дефиницији, и да је $\bigcup_{i=1}^{n} P_i = \{p_1, ..., p_n\}$. Даље, због d-дегенерисаности G, имамо да је $|P_i| \leq d + 1$ за све i. Запишимо $F(x)$ као

$$F(x) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{p \in P_i} p(x)$$

и посматрајмо његов моном $m(x) = x_n^{|P_n|} ... x_1^{|P_1|}$. Очигледно је да је $m(x)$ водећи јер је $\deg m(x) = \sum_{i=1}^{n} |P_i| = n = \deg F$, а такође коефицијент уз $m(x)$ у F мора бити ненула јер је коефицијент уз $x_i^| P_i|$ у $\prod_{p \in P_i} p(x)$ по дефиницији P_i ненегативан, а $m(x)$ се добија узастопним множењем монома

$x_i^{|P_i|}$ из $\prod_{p\in P_i} p(x)$ за $i = n, ..., 1$. Одатле по комбинаторном намештању нула директно следи да $F(x)$ за неко $x \in \mathbb{F}_q^n$ узима ненула вредност (јер је $q \geq d+2 > d+1 \geq |P_i|$), па не може бити идентички једнако нули, што нам даје контрадикцију. $\square$

3.2 Брисање чворова

Опет се питамо под којим условима можемо компоненту повезаности индуковану артикулационим чвором обрисати из датог графа, а да притом не променимо његов HG-број. Одговор на ово питање нам даје наредна теорема, што представља наш допринос теми.

Теорема 39. *Нека је G линеарно q-решив граф на n чворова (за степен простог броја q) такав да постоји његов артикулациони чвор v такав да нека од компоненти повезаности у $G \setminus \{v\}$ има највише $q-2$ чвора. Тада је и G без чворова те компоненте такође линеарно q-решив.*

Доказ. Нека је $f = (f_0...f_{n-1})$ дата линеарна стратегија над $\mathbb{F}_q$ у Γ, где су $v_0...v_{k-1}$ чворови компоненте повезаности коју бришемо ($k < q-1$), $v_k = v$ и $v_{k+1}...v_{n-1}$ остали чворови G. Тада је

$$F(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x_i - f_i(x)) = \prod_{i=0}^{k}(x_i - f_i(x))H(x) = 0$$

за све $x \in \mathbb{F}_q^n$. Потребно је да нађемо линеарни полином f'_k који зависи само од $v_{k+1}...v_{n-1}$ тако да полином $F'(x') = (x'_k - f'_k(x'))H'(x')$ узима вредност нула за све $x' \in \mathbb{F}_q^{n-k}$ (где x' у овом случају индексирамо са $k...n-1$, и где је веза H и H' аналогна као у доказу теореме 9).

Ако не постоји $x' \in \mathbb{F}_q^{n-k}$ тако да је $H'(x') \neq 0$, завршили смо, јер је онда за произвољну f'_k, $F'(x') = (x'_k - f'_k(x'))H'(x') = 0$ за свако $x \in \mathbb{F}_q^n$. У супротном, посматрајмо неко $x' \in \mathbb{F}_q^{n-k}$ за које је $H'(x') \neq 0$. Нека f_k, као линеарни полином, има облик $f_k(x) = a_1x_1 + ... + a_{k-1}x_{k-1} + a_{k+1}x_{k+1} + ...a_{n-1}x_{n-1} + b$, где је последњих неколико сабирака фиксирано избором x'. Тада је $a_{k+1}x_{k+1} + ... + a_{n-1}x_{n-1} + b$ фиксирано, па га можемо означити као константу b'. Остаје, дакле, $f_k(x) = (\sum_{i=0}^{k-1} a_ix_i) + b'$.

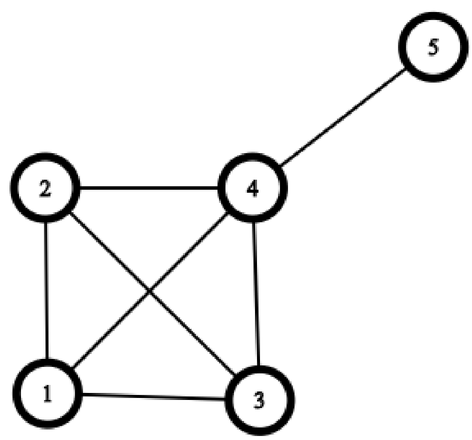
Претпоставимо да је бар један a_i, $0 \leq i \leq k-1$, различит од нуле. Како је и x_k фиксирано, број k-торки $(x_0...x_{k-1})$ за које је v_k чвор који тачно погађа (тј. број $(x_0...x_{k-1})$ за које је $x_k = f_k((x_0...x_{k-1})^\frown x'))$ је највише q^{k-1}, под нашом претпоставком (јер морамо оставити у том случају бар један сабирак a_ix_i, $a_i \neq 0$, да x_i узме вредност тако да буде баш $x_k = f_k((x_0...x_{k-1})^\frown x')$ буде задовољено). С друге стране, број k-торки $(x_0...x_{k-1})$ за које тачно погађа неки од чворова $v_0...v_{k-1}$ је највише kq^{k-1} (јер за фиксирани чвор и фиксирано бојење свих преосталих шешира, тај чвор погађа само у случају да носи боју коју одређују боје шешира које види, а према сопственој датој стратегији). Како је укупан број k-торки $(x_0...x_{k-1})$ једнак q^k, то v_k, једини преостали чвор, сем оних у компоненти повезаности, мора погађати за бар $q^k - kq^{k-1}$ k-торки $(x_0...x_{k-1})$ тачно своју боју. Али онда је, по претпоставци тврђења, $q^k - kq^{k-1} > q^k - (q-1)q^{k-1} = q^{k-1}$, односно добили смо да v_k мора погађати тачно за више k-торки $(x_0...x_{k-1})$ него што је то могуће, што је контрадикција с претпоставком да је бар неки a_i, $0 \leq i \leq k-1$, различит од нуле.

Према томе, сви коефицијенти у линеарном полиному f_k, уз нефиксиране x_i, $0 \leq i \leq k-1$, јесу нула, што значи да је сама вредност f_k фиксирана и једнака константи b' за фиксирано $x' \in \mathbb{F}_q^{n-k}$. Узмимо, дакле, да је за неко $x' \in \mathbb{F}_q^{n-k}$, f'_k дефинисано са $f'_k(x') = b'$ ако је $H'(x') \neq 0$ (где b' зависи од x') и $f'_k(x')$ једнако произвољној вредности ако је $H'(x') = 0$. Потребно је још показати да је f'_k коректно дефинисана, односно да не постоје две $(n-k)$-торке a' и b' за које је $H'(a') \neq 0$ и $H'(b') \neq 0$

и у којима се разликују a'_k и $'b_k$, док су за све i, $k+1 \leq i \leq n-1$ за које су v_k и v_i суседи, a'_i и b'_i једнаки. Али то би значило да је

$$a'_k = f_k(s^\frown a') = f_{k+1}(t^\frown b') = b'_{k+1}$$

(где су s, односно t произвољне k-торке и где друга једнакост важи јер f_k не зависи од почетне k-торке, пошто су одговарајући коефицијенти сви нула, и јер су елементи a' и b' од којих зависи f_k сви једнаки у одговарајућим паровима), што је опет контрадикција, јер смо претпоставили да a_k и b_k нису једнаки. Према томе, f'_k је коректно дефинисана и самим тим смо нашли добру стратегију погађања за $G \setminus \{v_0...v_{k-1}\}$. $\square$



Слика 2: K_4 са додатном граном

Ово и јесте најбоље што можемо да добијемо, јер не можемо да тврдимо да компоненту са $q-1$ чвором можемо избацити из графа, ако је овај линеарно q-решив. То, на пример, видимо ако на комплетан граф на q чворова додамо нови чвор и грану између тог чвора и тачно једног од чворова K_q (слика 2). С једне стране је очигледно да је у том графу $\mathrm{HG}_{\mathrm{lin}} = q$, док кад би претходна теорема важила и за компоненте величине $q-1$, могли бисмо из графа са слике обрисати све чворове сем додате гране и њена два чвора, и тада бисмо тврдили да је та грана линеарно q-решива, што за $q > 2$ није тачно.

4 Хроматска игра на графу

Сада ћемо увести једну занимљиву верзију игре погађања шешира на графу, која представља наш оригиналан допринос овој теми.

Дефиниција 40. *Нека је G граф и q природан број. Хроматском (G,q)-игром, у ознаци $(G,q)_\chi$, називамо класичну (G,q)-игру уз ограничење да се чворовима гарантује да боја постављена на њих мора бити различита од свих боја постављених на његове суседе у G. Граф G називамо хроматски q-решивим ако је $(G,q)_\chi$ победничка. Највеће q за које је G хроматски q-решив означавамо са $\mathrm{HG}_\chi(G)$.*

За ову верзију игре важе аналози основних својстава класичног HG-броја: хроматска решивост за q имплицира хроматску решивост за $p < q$, и хроматска q-решивост неког подграфа G имплицира и хроматску q-решивост G.

Ову верзију игре смо назвали хроматском јер се постављање боја у њој врши управо по правилима класичног бојења графа, тј. тако да два суседна чвора не смеју имати исту боју. Због тога је најмањи број боја, који морамо узети да би њихово адекватно распоређивање на чворовима графа било могуће, једнак управо хроматском броју графа, у ознаци $\chi(G)$ (да ово не бисмо мешали са функцијом доделе боја, ову ћемо надаље означавати са X). Показује се, штавише, да је сваки граф G хроматски $\chi(G)$-решив (чиме уједно показујемо и да дефиниција хроматске верзије игре има смисла, тј. да су сви графови хроматски решиви за неки нетривијални број боја).

Тврђење 41. *Сваки граф G је хроматски $\chi(G)$-решив.*

Доказ. Ово директно следи из чињенице да при сваком бојењу G у $\chi(G)$ боја мора постојати бар један чвор такав да његови суседи имају свих $\chi(G)$ боја сем једне, која у том случају мора припасти том чвору, и који стога може да погађа ту боју и да погоди тачно. Претпоставимо да не постоји овакав чвор. Изаберимо неку боју x. То би значило да ниједан чвор обојен у x није окружен са преосталом $\chi(G)-1$ бојом, дакле без нарушавања коректности бојења бисмо сваком од тих чворова могли да променимо боју у бар једну од преосталих $\chi(G)-1$, што би значило да је граф G обојив и са $\chi(G)-1$ бојом, контрадикција. $\square$

Сада ћемо пронаћи хроматски HG-број комплетног графа (што тражи захтевнији приступ него у случају класичне игре на графу).

Теорема 42. $\mathrm{HG}_\chi(K_n) = 2n-1$

Доказ. Докажимо најпре да је $\mathrm{HG}_\chi(K_n) \geq 2n-1$. Сваки од чворова види по $n-1$ други чвор, а како између свих њих постоји грана, то и сви они имају међусобно различите боје, па дати чвор не може имати ниједну од $n-1$ боје из скупа боја његових суседа, односно сваки чвор може бирати боју из скупа од n боја. Притом, $n-1$ боја је иста у сваком од скупова могућих боја за сваки чвор, и то је $n-1$ која се уопште не појављује у датом бојењу графа, док је преостала боја у сваком од скупова управо боја којом је дати чвор обојен.

Сада ћемо покушати да за сваки могући n-точлани скуп (n-скуп) боја одаберемо један његов елемент који погађа онај чвор који треба своју боју да погоди баш из тог n-скупа. Ако притом буде важило да за фиксирани $(n-1)$-скуп, међу свим n-скуповима који садрже тај $(n-1)$-скуп, бар једна погађа онај свој елемент који не припада том $(n-1)$-скупу, онда бисмо били готови, јер би то значило да за свако бојење K_n бар један чвор исправно погађа своју боју (јер је то баш она n-та боја из скупа од n боја из кога може да погађа). С друге стране, ово претходно је еквивалентно томе да сваком $(n-1)$-скупу доделимо неку од преосталих n боја (што значи да се за скуп од тих n боја бира та n-та боја), и то тако да при тој додели не добијемо два иста n-скупа (односно, за $n=3$, не можемо двојци $\{0,1\}$ доделити 2 и двојци $\{0,2\}$ доделити 1, јер би то значило да добијамо две исте тројке $\{0,1,2\}$ које би морале бирати различите елементе, 2, односно 1, што очигледно није могуће). Сада, како је укупан број n-скупова и укупан број $(n-1)$-скупова једнак (јер је $n+(n-1) = 2n-1$, што је број боја), претходно је еквивалентно томе да у сваком n-скупу изаберемо по један елемент тако да брисањем из сваког n-скупа изабраног елемента, не настају два иста $(n-1)$-скупа.

Ово ћемо учинити на следећи начин: поставимо све n-скупове у леви део, а све $(n-1)$-скупове у десни део неког бипартитног графа. Повежимо чвор из леве са чвором из десног дела ако одговарајући n-скуп са леве стране садржи одговарајући $(n-1)$-скуп са десне стране. То значи да из сваког чвора лево полази по n грана и да у сваки чвор десно увире по n грана. Ако бисмо нашли савршено упаривање чворова лево и десно, аутоматски бисмо добили и тражени избор елемената у сваком n-скупу, јер би то био елемент који представља разлику n-скупа на десном крају гране и $(n-1)$-скупа на левом крају гране која у савршеном упаривању одговара датом n-скупу (због савршеног упаривања можемо да гарантујемо да оваквим избором елемената у сваком од n-скупова не остају два иста $(n-1)$-скупа).

Остаје још да нађемо савршено упаривање чворова овог бипартитног графа. Изаберимо произвољних k чворова из левог дела, и посматрајмо све чворове из десног дела који су суседни неком од изабраних чворова лево. Нека тих чворова има l. Приметимо да из k изабраних чворова лево полази тачно kn грана, што значи и да у l суседних чворова десно увире тачно kn грана (које имају један чвор међу k изабраних лево). Претпоставимо сад да је $l < k$. То би значило да у чворове десно увире у просеку $\frac{kn}{l} > n$ грана, па би према томе морао постојати бар један међу тих l чворова у који увире бар $n+1$ грана, што није могуће јер у сваки чвор десно укупно увире тачно n грана. Важи, дакле, $k \leq l$ за произвољних k чворова из левог дела и произвољно k, па Холовом теоремом директно добијамо тражено савршено упаривање. Овиме смо показали да је $\mathrm{HG}_\chi(K_n) \geq 2n-1$. Да је $\mathrm{HG}_\chi(K_n) \leq 2n-1$ показује се аналогно као у тврђењу 7. $\square$

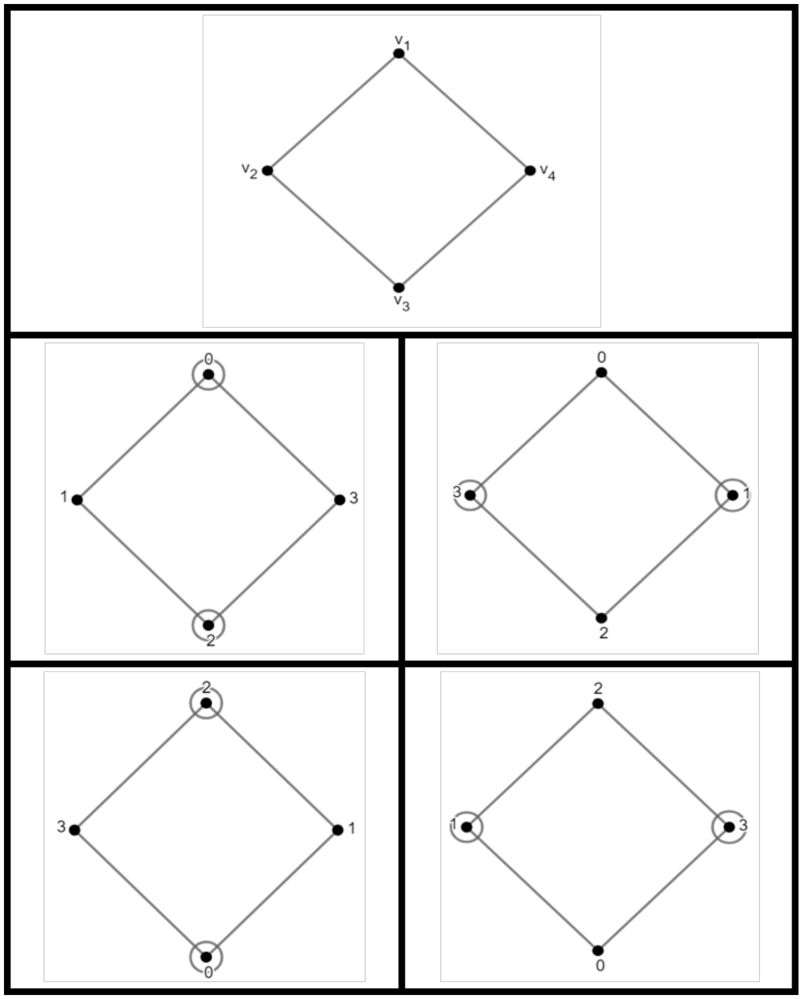
У доказу претходне теореме је сваки од чворова имао n могућих боја које су му биле доступне (јер мора имати различиту боју од сваког од преосталог $n-1$ чвора, који сви имају различите боје), тако да постоји одређена сличност са класичном игром где такође сваки чвор има доступних n боја. Ипак, хроматска игра се у овом смислу може посматрати као „тежа“, јер док у класичној игри сваки чвор бира боју из истог скупа боја и самим тим за сваки чвор боје преосталих чворова имају „исто значење“ (због чега и јесте могућа стратегија заснована на сабирању боја), у хроматској игри чворови не знају ни за један други чвор цео скуп боја из кога ови бирају боју, нити боје које виде могу посматрати као сабирке у класичној стратегији јер те боје могу имати другачију вредност за неки други чвор.

Иако је хроматска игра, дакле, у неку руку „тежа“, у њеном случају се добија суштински исти HG-број као у случају класичне игре (јер у оба случаја сваки од чворова своју боју погађа из скупа од n боја). Заправо, $\mathrm{HG}_\chi(K_n) = n + (n-1) = \mathrm{HG}(K_n) + \delta(K_n)$, где $\delta(G)$ означава најмањи степен неког чвора у G. Претходна једнакост нам отвара следеће питање: ако играмо хроматску игру на графу G са $\mathrm{HG}(G) + \delta(G)$ боја и све суседе неког чвора обојимо различитим бојама, добијамо да тај чвор своју боју погађа из скупа од највише $\mathrm{HG}(G)$ боја, што заправо значи да је тиме и игра на произвољном графу G „отежана“ у хроматској верзији тек за толико за колико је то случај и са K_n, и да бисмо можда могли наћи хроматску стратегију за тај број боја у сваком графу. Ипак, претходним разматрањем смо изоставили случај када нису све боје суседа неког чвора различите, што свакако може бити случај сем када постоје баш све гране између тих суседа (као у K_n), тако да би једно занимљиво питање било наћи G такав да је $\mathrm{HG}_\chi(G) < \mathrm{HG}(G) + \delta(G)$.

У том смислу нас интересују хроматски HG-бројеви једноставних графова, па би први корак ка њиховом налажењу, уз теорему 42, могло дати следеће тврђење.

Тврђење 43. *Ако је C_4 циклус дужине 4, важи да је $\mathrm{HG}_\chi(C_4) \geq 4$.*

Доказ. Да бисмо доказали да је C_4 хроматски 4-решив, пронаћи ћемо стратегију којом погађају чворови C_4. Означимо чворове редом са v_1, v_2, v_3, v_4 и њихове боје редом са x_1, x_2, x_3, x_4. Посматрајмо прво случај када је $x_1 = x_3$ и $x_2 \neq x_4$ (што је свакако еквивалентно томе да је $x_2 = x_4$ и $x_1 \neq x_3$). Тада чворови v_1 и v_3 знају да су њихове боје различите од x_2 и x_4, односно да су неке од две боје из скупа $[4] \setminus \{x_2, x_4\}$, а како су x_1 и x_3 исти, то ако обезбедимо да стратегије наспрамних чворова



Слика 3: Дијаграм стратегије за $x_1, x_3 \in \{0, 2\}$ и $x_2, x_4 \in \{1, 3\}$

који виде две различите боје и саме погађају различите боје, било би осигурано да тачно један од чворова v_1 и v_3 у претходном случају тачно погоди своју боју.

Остаје нам, дакле, да размотримо стратегије у два случаја: када су све боје чворова различите и када су боје наспрамних чворова исте. У првом случају још додатно морамо осигурати (због претходно размотреног) да наспрамни чворови погађају међусобно различите боје. Посматрајмо тај случај. Уколико обезбедимо стратегију која тачно погађа када је $x_1, x_3 \in \{0, 2\}$ (дакле $x_2, x_4 \in \{1, 3\}$), аналогно ћемо наћи стратегију и за друге парове боја наспрамних чворова, па ћемо добити стратегију која тачно погађа када год су све боје различите. Посматрајмо, дакле, стратегију дату дијаграмом на слици (значење дијаграма је да незаокружени чворови погађају за своју боју ону која им је написана на дијаграму, уколико се боје њихових суседа поклапају са бојама заокружених чворова; према томе, ако је $x_1 = 0$ и $x_3 = 2$, v_2 за своју боју погађа 1, а v_4 погађа 3). Одатле се јасно види да ако је $x_2 = 1, x_4 = 3$, v_1 и v_3 ће погађати тачвно ако су њихове боје редом 2 и 0, а ако су, пак, редом 0 и 2, у том случају ће тачно погађати v_2 и v_4. Слично закључујемо да имамо погодак и ако је $x_2 = 3, x_4 = 1$, чиме смо добили исправну стратегију за $x_1, x_3 \in \{0, 2\}$, а самим тим и за све случајеве где су све боје различите.

Остаје још случај када наспрамни чворови имају исте боје. Означимо са (x, y) за $x \neq y$ бојење при коме је $x_1 = x_3 = x$ и $x_2 = x_4 = y$. Фиксирајмо x. Тада можемо обезбедити да v_2 или v_4 тачно погоде своју боју за највише две вредности y (јер су исте боје, а можемо рећи да за $x_1 = x_3 = x$, v_2 погађа једну од те две вредности, а v_4 другу, чиме остаје да ако y узме трећу могућу вредност ниједан од v_2 и v_4 не погађа тачно). Према томе, остаје да испитамо да ли све парове (x, y) (којих има $4 \cdot 3 = 12$) можемо поделити у два скупа тако да у првом скупу (зваћемо га левим скупом) за свако s постоји највише два пара са $y = s$, а да у другом (десном) скупу за свако s постоје највише два пара са $x = s$ (јер смисао поделе на скупове је следећи: ако се у левом скупу налази (x, y), то значи да за $x_2 = x_4 = y$, један од чворова v_1 и v_3 погађа као своју боју баш x; то и јесте могуће јер се у левом скупу налазе највише два пара са том вредности y). Следећа подела нам даје решење, где је L леви, а D десни скуп:

$$L = \{(1, 0), (2, 0), (0, 1), (3, 1), (1, 2), (0, 3)\}$$

$$D = \{(2, 3), (2, 1), (3, 2), (3, 0), (0, 2), (1, 3)\}$$

Овиме смо довршили стратегију. □

Хипотеза коју износимо је да заправо важи $\mathrm{HG}_\chi(C_4) = 5$, чиме бисмо опет добили $\mathrm{HG}_\chi(C_4) = \mathrm{HG}(C_4) + \delta(C_4)$.

Важи и наредна теорема, чији је доказ аналоган доказу теореме 9, те га препуштамо читаоцу.

Теорема 44. *Нека је G хроматски q-решив граф на n чворова такав да постоји његов артикулациони чвор v такав да нека од новонасталих компоненти повезаности у $G \backslash \{v\}$ има мање од $\frac{q}{3}$ чворова. Тада је и G без чворова те компоненте хроматски q-решив.*

5 Закључак

Различите варијанте игре погађања шешира последњих година задобијају све више пажње. Прве од тих варијација које су проучаване су биле пробабилистичке природе, да би нешто касније почеле да се проучавају и игре у којима се гарантује да бар неко погоди своју боју шешира. Ми се у овом раду бавимо управо таквим варијацијама игре, и то на неком датом графу. Три варијације које смо посматрали су класична и линеарна, које су претходно изучаване у неколико радова, нпр. у [2], и хроматска, коју ми уводимо. Једна од ствари које су нас интересовале јесте колико „сужење“ у виду артикулационог чвора утиче на HG-број датог графа, односно може ли тај параметар да буде већи од HG-броја тог графа без компоненте повезаности индуковане артикулационим чвором. Теоремама 33, 39 и 44 и пропратним коментарима дајемо одговоре на ово питање у све три варијације игре на графу које посматрамо. Даље, показали смо да су у хроматској игри комплетни графови K_n хроматски $2n-1$-решиви и да је C_4 хроматски 4-решив, те смо дали хипотезу да је C_4 решив и за 5 боја. У раду смо поставили још нека питања, на која би била занимљиво дати одговор: колики је HG-број графова који се састоје из два комплетна подграфа једнаких величина повезаних у једном чвору (пример за $n = 5$ је дат у тврђењу 34), као и да ли се може наћи пример графа у коме је $\mathrm{HG}_\chi(G) < \mathrm{HG}(G) + \delta(G)$.

6 Захвалнице

Овом приликом аутор се захваљује пре свега свом ментору, проф. Луки Милићевићу, на свој помоћи у писању овог рада. Захваљује се и на томе што је за четири године предавања анализе са

алгебром омогућио упознавање са многим математичким темама које су биле значајна инспирација, а од којих су неке, попут комбинаторног намештања нула, пробабилистичког метода и Холове теореме, представљале основу математичког апарата овог рада.

Велико хвала аутор би упутио и Теодори Тодорић Милићевић на времену које је издвојила за исправљање језичких грешака и саветовање у вези с правописним недоумицама.

Коначно, поједине теореме из овог рада су настале као резултат рада на пројекту на исту тему у Истаживачкој станици „Петница“, те се аутор захваљује и проф. Бојану Башићу који је том пројекту био ментор у јеку почетка пандемије и потпуног преласка на онлајн комуникацију.

Литература

[1] Alon, N. (1999). *Combinatorial Nullstellensatz.* Combin. Probab. Comput., 8(1-2):7–29.

[2] Alon, N., Ben-Eliezer, O., Shangguan, C., Tamo, I. (2020). *The hat guessing number of graphs.* arXiv:1812.09752.

[3] Alon, N., Spencer, J. H. (2000). *The probabilistic method.* Њујорк, САД: John Wiley & Sons.

[4] Alon, N., Tarsi, M. (1988). *A nowhere zero point in linear mappings.* Combinatorica, 9(4):393–395.

[5] Bursian O., Kokhas K., Latyshev A., Retinskiy V. (2019). *Sages and hats.* Аранђеловац: Летња конференција турнира градова.

[6] Butler S., Hajiaghayi, M. T., Kleinberg, R. D., Leighton, T. (2008) *Hat Guessing Games.* SIAM J. Discrete Math, 22(2):592–605.

[7] Ebert T. (1998). *Applications of recursive operators to randomness and complexity.* Санта Барбара, САД: Универзитет Калифорније у Санта Барбари

[8] Farnik, M. (2015). *A hat guessing game.* Краков, Пољска: Јагелонски универзитет

[9] Gadouleau, M., Georgiou, N. (2013). *New constructions and bounds for Winkler's hat game.* SIAM J. Discrete Math., 29(2):823–834.

[10] Gardner, M. (1961). *The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions.* Њујорк, САД: Simon and Schuster.

[11] Krzywkowski, M. P. (2012). *Hat problem on a graph.* Ексетер, Енглеска: Универзитет у Ексетеру

[12] Robinson, S. (2001). *Why mathematician now care about their hat color*, The New York Times, Science Times Section. strana D5.

[13] Szczechla, W. (2015). *The three colour hat guessing game on cycle graphs.* Electron. J. Combin., 24(1):Paper 1.37, 19.